

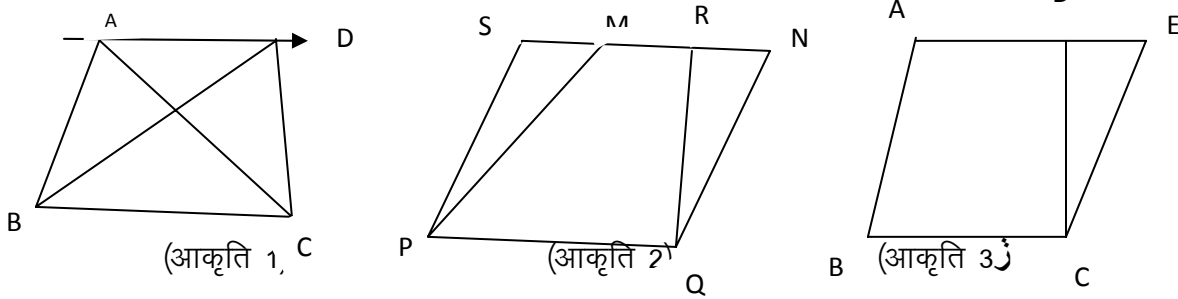
समान्तर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

कक्षा – IX

क्षेत्रफल – किसी सरल बंद आकृति द्वारा तल का घेरा हुआ भाग उस आकृति का संगत तलीय क्षेत्र कहलाता है। इस तलीय क्षेत्र का परिभाग या माप उस आकृति का क्षेत्रफल कहलाता है।

यदि दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं तो उनके क्षेत्रफल बराबर होते हैं। परन्तु इसके विपरीत दो बराबर क्षेत्रफल वाली आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच आकृतियाँ –



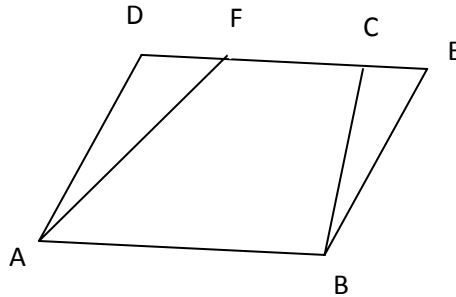
आकृति 1 में त्रिभुज ABC तथा त्रिभुज DBC एक ही आधार BC तथा एक ही समान्तर रेखा AD के बीच स्थित है।

आकृति 2 में समान्तर चतुर्भुज $PQNM$ एक ही आधार PQ तथा एक ही समान्तर रेखाओं SN तथा PQ के बीच स्थित है।

इसी प्रकार आकृति 3 में समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ तथा समलम्ब $ABCE$ एक ही आधार BC और एक ही समान्तर रेखाओं AE तथा BC के बीच स्थित है।

अतः दो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच कही जाती हैं। यदि उनका एक उभयनिष्ठ आधार हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष उस आधार के समान्तर किसी रेखा पर स्थित हो।

प्रमेय 1—एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित समान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं। उपपत्ति—दिये गये चित्र में दो समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ तथा $ABEF$ एक ही आधार AB और एक ही समान्तर रेखाओं DE और AB के बीच में स्थित हैं।



सिद्ध करना है।

समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज ABED का क्षेत्रफल

ΔDAF तथा ΔCBE में-

$\angle ADF = \angle BCE$ ($AD \parallel BC$, संगत कोण)

$\angle DFA = \angle CEB$ ($AE \parallel BE$, संगत कोण)

तथा $AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) कोण-भुजा-भुजा (ASA) से

$\Delta DAF \cong \Delta CBE$

अतः $ar(DAF) = ar(CBE)$

$ar(ABCD) = ar(DAF) + ar(ABCF)$

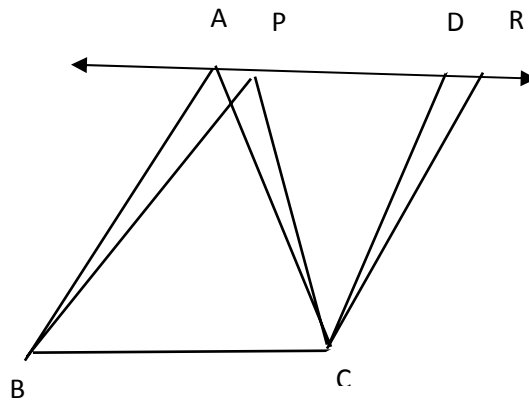
$= ar(CBE) + ar(ABCF)$

$= ar(ABEF)$

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा ABEF के क्षेत्रफल बराबर हैं।

प्रमेय -2 एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समान्तर रेखाओं की बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

उपपत्ति - दी गयी आकृति में $BC \parallel AR$ रेखा AR पर बिन्दु P और D इस प्रकार खींचे कि $AB \parallel DC$ तथा $PB \parallel RC$



इस प्रकार हमें दो समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा PBCR प्राप्त होते हैं। दोनों चतुर्भुज एक ही आधार BC तथा एक ही समान्तर रेखाओं BC और AR के बीच स्थित हैं।

अतः $ar(ABCD) = ar(PBCR)$ ----- (1)

बिन्दु AC तथा PC को मिलाया।

ΔABC तथा ΔCDA में -

भुजा $AB = CD$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

भुजा $BC = DA$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

भुजा $CA = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (SSS सर्वांगसमता)

इसी प्रकार $\Delta PBC \cong \Delta CRP$

चूँकि सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

इसलिए $\text{ar} (ABC) = \frac{1}{2} \text{ar} (ABCD)$ -----(2)

और $\text{ar} (PBC) = \frac{1}{2} \text{ar} (PBCR)$ -----(3)

अतः समीकरण (1),(2) तथा (3) से –

$\text{ar} (ABC) = \text{ar} (PBC)$

इस प्रकार एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

प्रश्न – 1 सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार (एक भुजा) तथा संगत शीर्षलम्ब (ऊँचाई) के गुणनफल के आधे के बराबर होता है।

हल – माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

भुजा AB पर DN लम्ब खींचा।

विकर्ण BD को मिलाया।

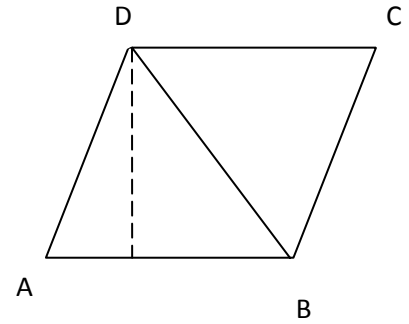
चूँकि $\Delta DAB \cong \Delta BCD$

इसलिए $\text{ar} (\Delta DAB) = \text{ar} (\Delta BCD)$

अतः $\text{ar} (\Delta DAB) = \frac{1}{2} \text{ar} (ABCD)$

$$= \frac{1}{2} AB \times DN$$

$$= \frac{1}{2} \text{आधार} \times \text{संगत ऊँचाई}$$

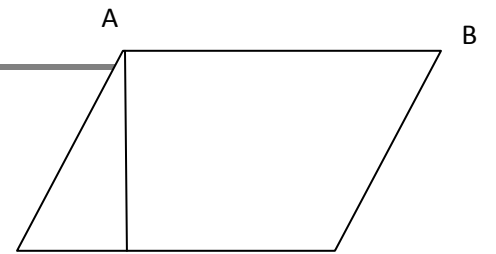


प्रश्न 2 – दी गयी आकृति में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, $AE \perp DC$ और $CF \perp AD$ है। यदि और $AB=16$ सेमी, $AE=8$ सेमी, और $CF=10$ सेमी है तो AD ज्ञात कीजिए।

हल– ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

भुजा DC पर संगत लंब AE है।

$\text{ar} (ABCD) = \text{आधार} \times \text{संगत ऊँचाई}$



$$\begin{aligned}
&=DC \times AE \\
&=16 \text{ सेमी} \times 8 \text{ सेमी} \\
&=128 \text{ सेमी}^2
\end{aligned}$$

भुजा AD पर संगत लंब CF है।

ar (ABCD)= आधार x संगत ऊँचाई

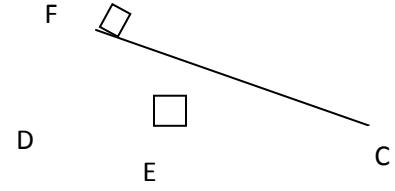
$$\begin{aligned}
&= AD \times CF \\
&= AD \times 10 \text{ सेमी}
\end{aligned}$$

दोनों स्थितियों में समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बराबर होगा।

$$AD \times 10 \text{ सेमी} = 128 \text{ सेमी}^2$$

$$AD = \frac{128 \text{ सेमी}^2}{10 \text{ सेमी}} = 12.8 \text{ सेमी}$$

$$AD = 12.8 \text{ सेमी}$$



प्रश्न-3 दर्शाइये कि त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करती है।

हल-दी गई आकृति में ABC एक त्रिभुज है, और AD त्रिभुज की एक माध्यिका है। शीर्ष A से $AN \perp BC$ खींचा।

चूंकि बिन्दु D भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

अतः $BD = DC$

$$\begin{aligned}
\text{ar} (\triangle ABD) &= \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई} \\
&= \frac{1}{2} BD \times AN \\
&= \frac{1}{2} DC \times AN \quad (BD=DC) \\
&= \text{ar} (\triangle ADC)
\end{aligned}$$

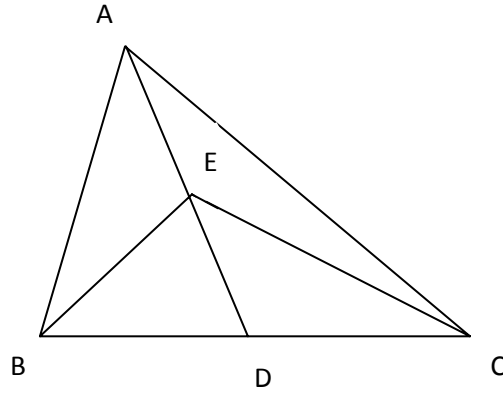
इस प्रकार $\text{ar} (\triangle ABD) = \text{ar} (\triangle ADC)$

प्रश्नावली

प्रश्न-1 यदि E, F, G तथा H क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य बिन्दु है तो दर्शाइये कि $\text{ar}(\text{EFGH}) = \frac{1}{2} \text{ar}(\text{ABCD})$ है

प्रश्न-2 P और Q क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिन्दु हैं तो दर्शाइये कि $\text{ar}(\Delta APB) = \text{ar}(\Delta BQC)$ है

प्रश्न-3 दी गई आकृति में ΔABC की एक माध्यिका AD पर स्थित कोई बिन्दु E है। दर्शाइये कि $\text{ar}(\Delta ABE) = \text{ar}(\Delta ACE)$



प्रश्न-4 D, E, F क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। दर्शाइये कि

1. BDEF एक समान्तर चतुर्भुज है।
2. $\text{ar}(\Delta DEF) = \frac{1}{4} \text{ar}(\Delta ABC)$
3. $\text{ar}(\text{BDEF}) = \frac{1}{2} \text{ar}(\Delta ABC)$