निर्दे”ाांक ज्यामिति

कक्षा x

1. किसी बिन्दु की y–अक्ष तथा x- अक्ष से दूरी क्रम”ाः भुज और कोटि होती है।

2. x - अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्दे”ाांक (x,0) होते हैं।

3. y - अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्दे”ाांक (0,y) होते हैं।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी : – दो बिन्दुओं के बीच की दूरी उन दो बिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड की लम्बाई होती है।

दो बिन्दुओं P (x_1,y_1) और Q (x_2,y_2) के बीच की दूरी है

$$PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

या

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

इसे दूरी सूत्र कहते हैं।

प्र”न : बिन्दु P(-6,7) और Q (-1,-5) के बीच की दूरी ज्ञात करो ?

हल : यहॉ $x_1=-6$, $y_1=7$

$x_2= -1, y_2= -5$

$$PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$PQ=\sqrt{(-1+6)^2+(-5-7)^2}$$

$$=\sqrt{(5)^2+(-12)^2}$$

$$=\sqrt{25+144}$$

$$=\sqrt{169}$$

$$=13$$

महत्वपूर्ण बिन्दु :–

1. तीन बिन्दु समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष होगे, यदि तीन दूरियों में से कोई दो दूरियॉ समान होंगी।
2. तीन बिन्दु त्रिभुज के शीर्ष होंगे यदि तीन दूरियों में से किन्ही दो दूरियों का योग तीसरी दूरी से अधिक हो।
3. तीन बिन्दु समकोण त्रिभुज के शीर्ष होंगे यदि तीन दूरियों में से किन्ही दो दूरियों के वर्गो का योग तीसरी दूरी के वर्ग के बराबर हो।
4. चार बिन्दु समान्तर चतुर्भज के शीर्ष होंगे, यदि चार दूरियों में से आमने–सामने की दूरियॉ समान हो परन्तु विकर्ण की लम्बाई समान न हो।
5. चार बिन्दु वर्ग के शीर्ष होंगे, यदि चारों दूरियॉ समान हो तथा विकर्ण भी समान हो।

6. तीन बिन्दु संरेखीय होंगे, यदि तीन दूरियों में से किन्ही दो दूरियों का योग तीसरी दूरी के समान हो।

प्र”न : y अक्ष पर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A(6,5) और B(-4,3) से समदूरस्थ हो ?

हल – माना y-अक्ष पर स्थित कोई बिन्दु (0,y) है,

अतः बिन्दु P(0,y) बिन्दुओं A(6,5) और B(-4,3) से समदूरस्थ है। तब

PA=PB

$PA^2 = PB^2$

$(6-0)^2+ (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

$36+25+y^2-10y=16+9+y^2-6y$

81-10y=25-6y

4y=36

y=9

अतः बिन्दु (0,9) हैं।

विभाजन सूत्र :

दो बिन्दुओं $A(x_1,y_1,)$ और $B(x_2,y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB को $m_1:m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले बिन्दु P(x,y) के निर्दे”ांक हैं –

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

इसे विभाजन सूत्र कहते हैं।

नोटः यदि P रेखाखण्ड AB का मध्य बिन्दु है तो बिन्दु P के निर्दे”ाांक

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ होंगे।

विभाजन सूत्र पर आधारित महत्वपूर्ण उदाहरणों के हल :

प्र”न : बिन्दु (-4, 6) बिन्दुओं A (-6,10) और B (3, -8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करता है ?

हल : माना बिन्दु (-4,6) रेखाखण्ड AB को K:1 के अनुपात में विभाजित करता है,

विभाजन सूत्र से –

$(-4,6) = \left(\frac{3K-6}{K+1}, \frac{-8K+10}{K+1}\right)$

अतः $-4 = \frac{3K-6}{K+1}$

-4K-4 = 3 K - 6

7 K = 2

K = 2/7

K : 1 = 2 : 7

अतः बिन्दु (-4, 6) बिन्दुओं A (-6, 10) और B (3 , -8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को 2:7 के अनुपात में विभाजित करता है।

प्र”न : बिन्दुओं A (2,-2) और B (-7, 4) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को सम त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्दे”ांक ज्ञात कीजिए ?

हल :

माना रेखाखण्ड AB A––––P––––Q––––B

को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दु P और Q हैं,

अर्थात AP = PQ =QB

अतः P रेखाखण्ड AB को 1: 2 के अनुपात में विभाजित करता है। अतः P के निर्दे”ांक हैं :

$\left(\frac{1.-7+2.2}{1+2}, \frac{1.4+2.-2}{1+2} \right)$

$= \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3} \right)$

= (-1, 0)

अतः Q रेखा खण्ड AB को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है। अतः Q के निर्दे”ांक हैं :

$$\left(\frac{2.-7+1.2}{2+1}, \frac{2.4+1.-2}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right)$$

$$= (-4,2)$$

अतः बिन्दु A और B को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्दे”ांक (-1, 0) और (-4,2) हैं।

प्र”न : यदि बिन्दु A(6,1), B(8,2), C(9,4) और D(P,3) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों तो P का मान ज्ञात कीजिए ?

हलः चूँकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ...

अतः विकर्ण AC के मध्यबिन्दु के निर्दे”ांक = विकर्ण BD के मध्य बिन्दु के निर्दे”ांक

मध्य बिन्दु सूत्र से-

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

अर्थात $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

या $\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{5}{2}\right)$

तुलना करने पर

$\frac{15}{2} = \frac{8+P}{2}$

15 = 8+P

P=15-8

P=7

त्रिभुज का क्षेत्रफल :–

बिन्दुओं $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ और (x_3,y_3) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \left| x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3 (y_1-y_2) \right|$

या $\frac{1}{2} \left| (x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2) \right|$

Note : यदि बिन्दु $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ तथा $C(x_3,y_3)$ संरेखीय हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा।

अर्थात $x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3 (y_1-y_2)=0$

त्रिभुज का क्षेत्रफल सदैव धनात्मक होता है। इस लिए त्रिभुज के क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान लिया जाता है।

महत्वपूर्ण प्र”नों के हल :

प्र”न : K का मान ज्ञात कीजिए यदि बिन्दु A(2,3), B(4,K) और C(6,-3) संरेखीय हैं ?

हल : चूँकि तीनों बिन्दु संरेखीय हैं इस लिए त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा।

अर्थात :

$$= \frac{1}{2} \left| x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3 (y_1-y_2) \right|$$

$$\frac{1}{2} \left| 2(K+3)+4(-3-3)+6(3-K) \right| =0$$

या 2K+6-24+18-6K=0

या -4K+24-24= 0

या -4K=0

या K=0

अतः K का मान 0 है।

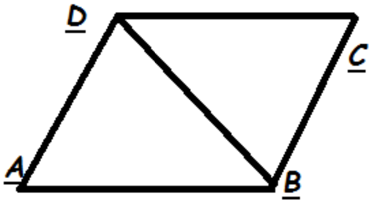
प्र”न : यदि A(-5,7), B(-4,-5), C(-1,-6) और D(4,5) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

चतुर्भज ABCD में B और D को मिलाने पर त्रिभुज ABD तथा त्रिभुज BCD प्राप्त होते हैं अतः

त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \left| x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3 (y_1-y_2) \right|$$



$= \frac{1}{2} | -5 (-5 -5)+ (-4) (5-7)+4(7+5) |$

$= \frac{1}{2} |-5(-10)-4(-2)+4(12)|$

$= \frac{1}{2} | 50+8+48|$

$= \frac{106}{2} = 53$ वर्ग मात्रक

त्रिभुज BCD का क्षेत्रफल =

$= \frac{1}{2} | x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3 (y_1-y_2)|$

$= \frac{1}{2} | - 4(-6 -5) -1(5 +5) +4(-5 +6) |$

$= \frac{1}{2} | -4(-11)-1(10)+4(1)|$

$= \frac{1}{2} |44-10+4|$

$= \frac{1}{2} |38|$

=19 वर्ग मात्रक

अतः चतुर्भज ABCD का क्षेत्रफल 53+19 = 72 वर्ग मात्रक

Made By- Mukesh Upadhyaya

<u>LT MATHS</u>

<u>K.N.U.G.M.I.C.PITHORAGARH</u>