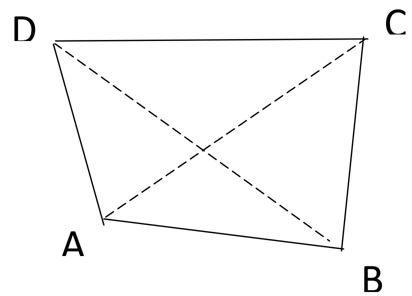
चतुर्भुज

कक्षा–IX

चतुर्भुज– चार सरल रेखाओं (भुजाओं) से घिरी हुई बन्द आकृति को चतुर्भज कहतें है। एक चतुर्भुज की चार भुजाऐं ,चार कोंण ,चार कोण,चार शीर्ष तथा दो विकर्ण होते है।

दिये गये चित्र में चतुर्भुज की



(1) चार भुजाएं–AB,BC,CD तथाDA

(2). चार कोंण – $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ तथा $\angle D$

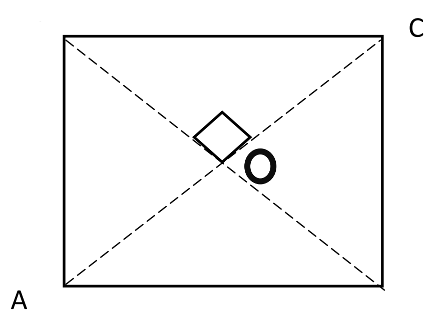
(3) चार शीर्ष – शीर्ष A, शीर्ष B, शीर्ष C, तथा शीर्ष D

(4) दो विकर्ण– विकर्ण AC, विकर्ण BD चतुर्भुज के चारों अन्त : कोणों का योग 360^0होता है।

चतुर्भुज के प्रकार– विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज निम्नलिखित हैं।

वर्ग– वर्ग एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी चारों भुजाऐं बराबर और प्रत्येक अन्तः कोण समकोंण पर समद्विभाजित करते हैं।

सम्मुख चित्र में ABCD एक वर्ग है।



जिसमें –

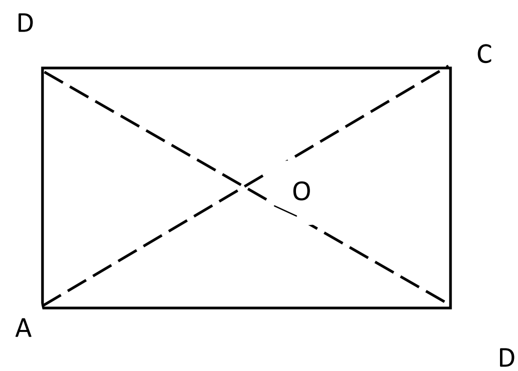
भुजा AB=BC=CD=DA

$\angle A= \quad \angle B= \quad \angle C= \quad \angle D= 90^0$

विकर्ण AC = BD

आयत – आयत की सम्मुख भुजाऐ बराबर तथा प्रत्येक कोंण समकोण होता है। इसके विकर्ण बराबर तथा एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

दिये गये चित्र में ABCD एक आयात है।



जिसमें–

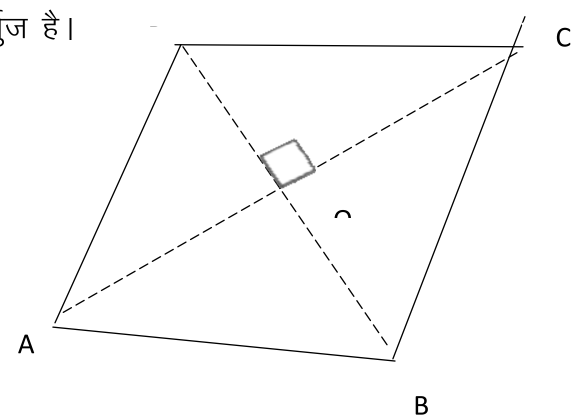
भुजा AB = CD , भुजा BC = DA

$\angle A = \quad \angle B = \quad \angle C = \quad \angle D = 90^0$

विकर्ण AC = BD

समचतुर्भुज – समचतुर्भुज की चारों भुजाऐं समान माप की तथा सम्मुख कोंण बराबर होते हैं। समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

दिये गये चित्र में A B C D एक समचतुर्भुज है।



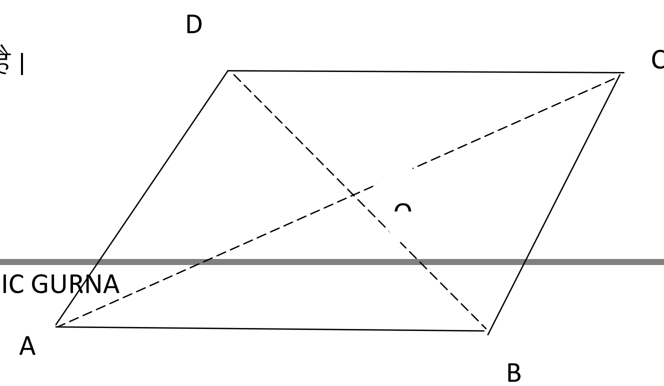
जिसमें भुजा AB = BC =CD=DA

$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$

AB ∥ CD तथा BC ∥ DA

समान्तर चतुर्भुज –समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐ तथा सम्मुख कोंण बराबर होते हैं। इसके विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते हैं।

सम्मुख चित्र में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



जिसमें

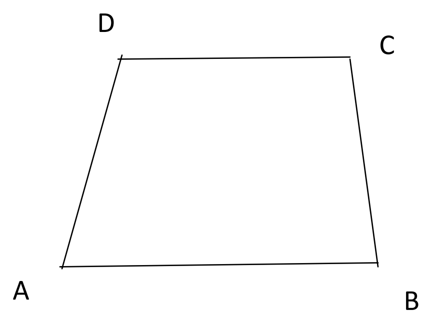
भुजा$AB = CD$, $BC = DA$

$\angle A = \angle C$ तथा $\angle B = \angle D$

$AB \parallel CD$ तथा $BC \parallel DA$

समलम्ब –यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो तो उसे समलम्ब चतुर्भुज कहते हैं।

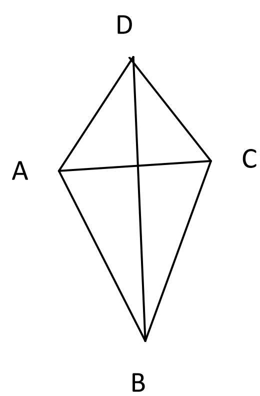
चित्र में ABCD एक समलम्ब है।



जिसमें $AB \parallel CD$

पतंग –पतंग वह चतुर्भुज है जिसके आसन्न भुजाओं के दो युग्म बराबर होते हैं।

सम्मुख चित्र में ABCD एक पतंग है

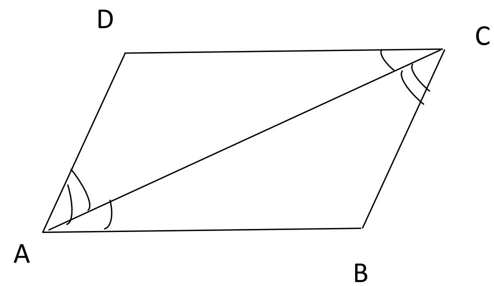


जिसमें

भुजा $AB = BC$ तथा भुजा$CD = DA$

प्रमेय 01– किसी समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वागसम त्रिभुजों के विभाजत करता हैं।

उपपत्ति – दी गयाी आकृति में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



AC उसका एक विकर्ण है।

सिद्ध करना है $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

समान्तर चतुर्भु ABCD में –

$AB = CD$ तथा $BC \parallel DA$

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle BCA = \angle DAC$ (एकान्तर कोण)

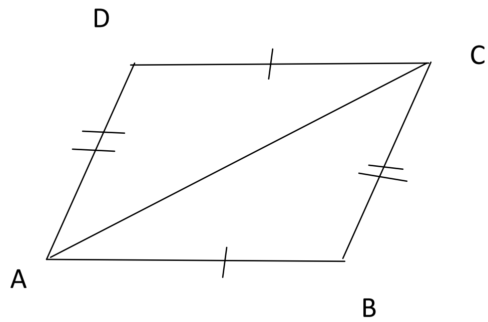
भुजा $AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः भुजा, कोण, भुजा सर्वागसमता से $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

इस प्रकार विकर्ण AC समान्तर चतुर्भु ABCD को दो सर्वागसम त्रिभुजों ABC तथा CDA में विभाजित करता हैं।

प्रमेय 02– यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हों, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

उपपत्ति –ABCD एक चतुर्भुज है। जिसमें सम्मुख भुजाओं के युग्म बराबर है। अतःΔABCतथाΔCDA में–



भुजा $AB = CD$(दिया है)

भुजा $BC = DA$ (दिया है)

भुजा AC उभयनिष्ठ है।

अत : भुजा –भुजा –भुजा (SSS) सर्वागसमता से$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

अत : $\angle BAC = \angle DCA$

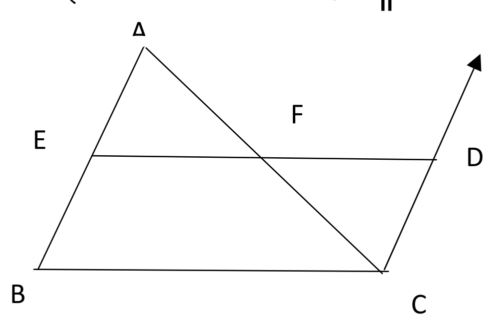
तथा $\angle BCA = \angle DCA$

एकान्तर कोणों के युग्म बराबर हैं अत : चतुर्भज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज होगा।

प्रमेय 03– किसी त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है।

दिया है –ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिन्दु क्रमशः E तथा F हैं।
सिद्ध करना है–$EF \parallel BC$

रचना – बिन्दु C से रेखा CD को इस प्रकार बढाया कि $CD \parallel BA$ तथा EF को D तक बढायझं



इस प्रकार ΔAEF तथा ΔCDF में

$\angle FAE = \angle FCD$ (एकान्तर कोण)

भुजा $FA = FC$ (दिया है।)

तथा $\angle EFA = \angle DFC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत : $\Delta AEF \cong \Delta CDF$(कोण ,भुजा, कोण नियम से)

इसलिए $EF = DF$ तथा $AE = CD$

$\therefore AE = BE$

$\therefore BE = AE = DC$

अतः BCDE एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore ED \parallel BC$

या $EF \parallel BC$

इस प्रकार किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलानं वाला रेखा खण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है।

प्रमेय 04– किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दूओं का मिलाने वाला रेखा खण्ड तीसरी भुजा का आधा होता है।

उपपत्ति – उपरोक्त प्रमेय से

$EF \parallel BC$

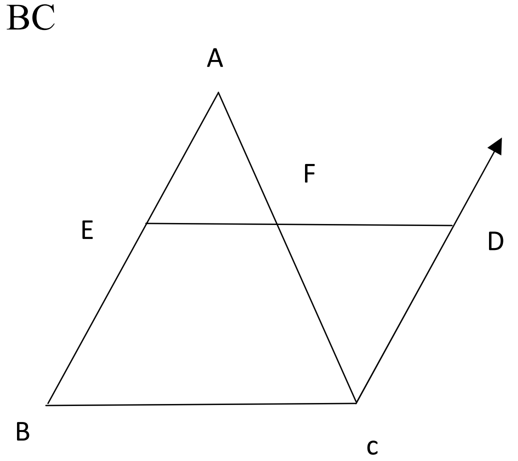
$\therefore \quad \Delta AEF \cong \Delta\, CDF$

$\therefore EF = DF$

अर्थात F रेखा ED का मध्य बिन्दु होगा।

$\therefore$BCDE एक समान्तर चतुर्भज हैं

$\therefore EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$



अतः किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलानं वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा का आधा होता है।

प्रश्न1 – एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल – चतुर्भुज के कोणों का अनुपात 3 : 5 : 9 : 13 है। माना K एक अनुपाती नियतॉक है।

अतः चतुर्भुज के कोणों की माप क्रमशः 3 K , 5 K, 9 K तथा 13 K होगी।

चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों का योग 360^0 होता है।

$\therefore 3K + 5K + 9K + 13K = 360^0$

$$30K = 360^0$$

$$K = 360^0 / 30 = 12^0$$

चतुर्भुज का पहला कोण $=3k=3x12=36^0$

दूसरा कोण $= 5k=5x12=60^0$

तीसरा कोण $=9k=9x12=108^0$

चौथा कोण $=13k=13x12=156^0$

अतः चतुर्भुज के अन्तः कोण क्रमशः 36^0, 60^0,108^0 तथा 156^0 होंगे।

प्रश्न –ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P,Q,R,S क्रमशः भुजाओं AB,BC,CD तथा DA के मध्य बिन्दु है AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइये कि

(1) $SR \parallel AC$ और $SR=½ AC$ है।

(2) PQ = SR है।

(3) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल – (1)ΔACD में CD तथा DA के मध्य बिन्दु क्रमशः S तथा Rहै।

किसी त्रिभुज की दो भुजाऐ के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर तथा उसकी आधी होती है।

अतः $SR \parallel AC$ और $SR= 1/2AC$

(2) ABC में भुजाओंAB तथाBCके मध्य बिन्दु क्रमशः P तथाQ है।

अतः $PQ \parallel AC$ और $PQ = ½ AC$ ---(1)

तथा $SR \parallel AC$ और $SR= ½ AC$ -----(2)

समी0 1 तथा 2 से

PQ =SR

तथा PQ ‖SR

(3) ABC तथाACD में

PQ‖ACतथा PQ=½ AC

और SR ‖ AC तथा SR = ½ AC

अतः PQ ‖ SR तथा PQ =SR

चतुर्भुज PQRS में सम्मुख भुजाओं का युग्म परसपर समान्तर तथा बराबर है अतः PQRSएक समान्तर चतुर्भुज है।

प्रश्नावली

प्रश्न 1 – दर्शाइये कि आयत का प्रत्येक कोण एक समकोण होता है।

प्रश्न 2 – यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो दर्शाइये किवह एक आयत है।

प्रश्न 3 –ABCD एक समचतुर्भुज है और P,Q,R और Sक्रमशः भुजाओं AB,BC,CDऔरDA के मध्य बिन्दु हैं। दर्शाइये कि चतुर्भुजPQRA एक आयत है।