

कक्षा - XI अर्थशास्त्र
सह-सम्बन्ध - CORRELATION

अभिप्राय- यह दो या अधिक श्रेणियों के बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध को स्पष्ट करता है। एक श्रेणी में परिवर्तन होने से दूसरी सम्बन्धित श्रेणी में भी परिवर्तन हो जाता है।
अर्थात् श्रेणियों के समक आंगस में अभिन्न रहते हैं एक का परिवर्तन दूसरे को प्रभावित करता है तब उनके बीच सह-सम्बन्ध पाया जाता है।

परिभाषा- प्रो किंग के अनुसार- "दो श्रेणियाँ तथा समूहों के बीच कार्य-कारण के अर्थ हैं एक श्रेणी का परिवर्तन दूसरी श्रेणी का प्रभावित करना"

सह-सम्बन्ध का महत्व- सह-सम्बन्ध का महत्व दर्शाने वाले प्रमुख बिन्दु हैं:

- 1- दो चरों के मध्य सम्बन्धों को जानने में सहायक।
- 2- एक चर के मूल्य के आधार पर दूसरे चर के मूल्य का अनुमान लगाने में सहायक।
- 3- शोध तथा ज्ञान के नये क्षेत्रों को खोज में सहायक।
- 4- व्यावसायिक निर्णय लेने में सहायक।
- 5- आर्थिक व्यवहारों को समझने में सहायक।
- 6- प्रतियोगन विस्तारण का आधार।

सह-सम्बन्ध के प्रकार-

1. घनात्मक व ऋणात्मक सह-सम्बन्ध।
2. श्रेणीय व वक्र रेखीय सह-सम्बन्ध।
3. सरल, बहुगुणी व आंशिक सह-सम्बन्ध।

1. **घनात्मक सह-सम्बन्ध** - यदि दो समक श्रेणियों में परिवर्तन एक ही दिशा में होता है अर्थात् एक श्रेणी में वृद्धि होने से दूसरी श्रेणी में वृद्धि होती है अथवा एक की कमी से दूसरी श्रेणी में भी कमी होती है तो उनके सह-सम्बन्ध को घनात्मक अथवा प्रत्यक्ष सह-सम्बन्ध कहते हैं। जैसे वस्तु की पूर्ति की वृद्धि के साथ-साथ उसकी कीमत में भी वृद्धि होती है।

अतः वस्तु की पूर्ति और उसकी कीमत में घनात्मक सह-सम्बन्ध है।

सारणी 1

सारणी 2

घनात्मक सह-सम्बन्ध		घनात्मक सह-सम्बन्ध	
दोनों चरों के मूल्य में वृद्धि		दोनों चरों के मूल्य में कमी	
श्रेणी X	श्रेणी Y	श्रेणी X	श्रेणी Y
5	10	25	60
12	13	20	50
18	32	15	40
25	48	10	30
28	60	5	20

सारणी 1 में X और Y दोनों श्रेणियों के मूल्य बढ़ रहे हैं। और सारणी 2 में दोनों श्रेणियों के मूल्य घट रहे हैं। दोनों ही दशाओं में सह-सम्बन्ध धनात्मक है।

2. ऋणात्मक सह-सम्बन्ध-

जब दो श्रेणियों में परिवर्तन एक ही दिशा न होकर दो विपरीत दिशाओं में होते हैं अर्थात् एक में वृद्धि होने पर दूसरे में कमी होती है या एक में कमी होने से दूसरे में वृद्धि होती है तो उसके सह-सम्बन्ध को ऋणात्मक, विलोम या प्ररोक्ष सह-सम्बन्ध कहते हैं।

सारणी 3 व 4 ऋणात्मक सह-सम्बन्ध को दर्शा रही हैं, क्योंकि दोनों ही दशाओं में श्रेणीयां विपरीत दिशा में बदल रही हैं।

सारणी -3

सारणी-4

ऋणात्मक सह-सम्बन्ध-एक घर में वृद्धि तथा दूसरे में कमी		ऋणात्मक सह-सम्बन्ध-एक घर में कमी तथा दूसरे में वृद्धि	
श्रेणी X	श्रेणी Y	श्रेणी X	श्रेणी Y
10	80	50	30
20	70	40	45
30	55	30	55
40	45	20	70
50	30	10	80

2. रेखीय तथा वक्र रेखीय सह-सम्बन्ध-

(i) रेखीय सह-सम्बन्ध- यदि दो समक श्रेणियों के परिवर्तनों का अनुपात स्थायी होता है तो उनका सह-सम्बन्ध रेखीय कहलाता है उदाहरण के लिये सारणी-5 में X तथा Y तथा श्रेणीयों में परिवर्तन अनुपात स्थिर है।

सारणी-5

श्रेणी X	श्रेणी Y
10	50
20	100
30	150
40	200
50	250

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट होता है कि रेखीय सह-सम्बन्ध में दोनों घरों के बीच विचरण का अनुपात स्थायी रहता है। रेखीय सह-सम्बन्ध वाले घर मूल्यों को यदि ग्राफ पेपर पर अंकित किया जाय तो एक सीधी रेखा प्राप्त होती है।

(ii) वक्ररेखीय सह-सम्बन्ध - जब दो समक श्रेणियों के परिवर्तन का अनुपात स्थिर न रहकर परिवर्तनशील होता है तो उनके बीच वक्ररेखीय सह-सम्बन्ध पाया जाता है इसे ग्राफ पेपर पर प्रदर्शित किया जाय तो एक वक्ररेखा प्राप्त होती है, जो वक्ररेखीय सह-सम्बन्ध को दर्शाती है।

3. सरल बहुगुणी एवं आंशिक सह-सम्बन्ध-

(i) सरलसह-सम्बन्ध- दो चर मूल्यों के बीच पाये जाने वाले सह-सम्बन्ध को सरल सह-सह-सम्बन्ध कहते हैं। इन दोनों में से एक श्रेणी कारण और दूसरी इस कारण का प्रभाव प्रदर्शित करती है कारण बताने वाली श्रेणी को आधार श्रेणी तथा प्रभाव बताने वाली श्रेणी को सम्बन्ध श्रेणी कहते हैं।

(ii) बहुगुणीय सह-सम्बन्ध- जब स्वतन्त्र चर मूल्य दो या दो से अधिक होते हैं और आश्रित चरमूल्य केवल एक ही होता है तब उसे बहुगुणी सह-सम्बन्ध कहते हैं। इसमें समस्त स्वतंत्र चरमूल्यों का संयुक्त प्रभाव आश्रित चर मूल्यों का पड़ता है। उदाहरणार्थ- यदि वर्षा की मात्रा और प्रयुक्त उर्वरक दोनों का प्रतिहेक्टेयर चावल के उत्पादन पर सामूहिक प्रभाव का गणितीय अध्ययन किया जाता है तो वह बहुगुणीय सह-सम्बन्ध कहलायेगा।

(iii) आंशिक सह-सम्बन्ध- आंशिक सह-सम्बन्ध में दो से अधिक चर मूल्यों का तो अध्ययन किया जाता है परन्तु सह-सम्बन्ध केवल दो चर मूल्यों का ही निकाला जाता है। अन्य चर मूल्यों को स्थिर रखा जाता है उदाहरणार्थ - यदि प्रयुक्त उर्वरक की एक निश्चित मात्रा से वर्षा की मात्रा और प्रतिहेक्टेयर चावल के उत्पादन के सम्बन्ध का विवेचन किया जाय तो वह आंशिक सह-सम्बन्ध कहलायेगा।

विक्षेप अभिप्राय - दो श्रेणीयों के बीच पारस्परिक सम्बन्ध को प्रकट करने वाले चित्र को विक्षेप चित्र कहते हैं।

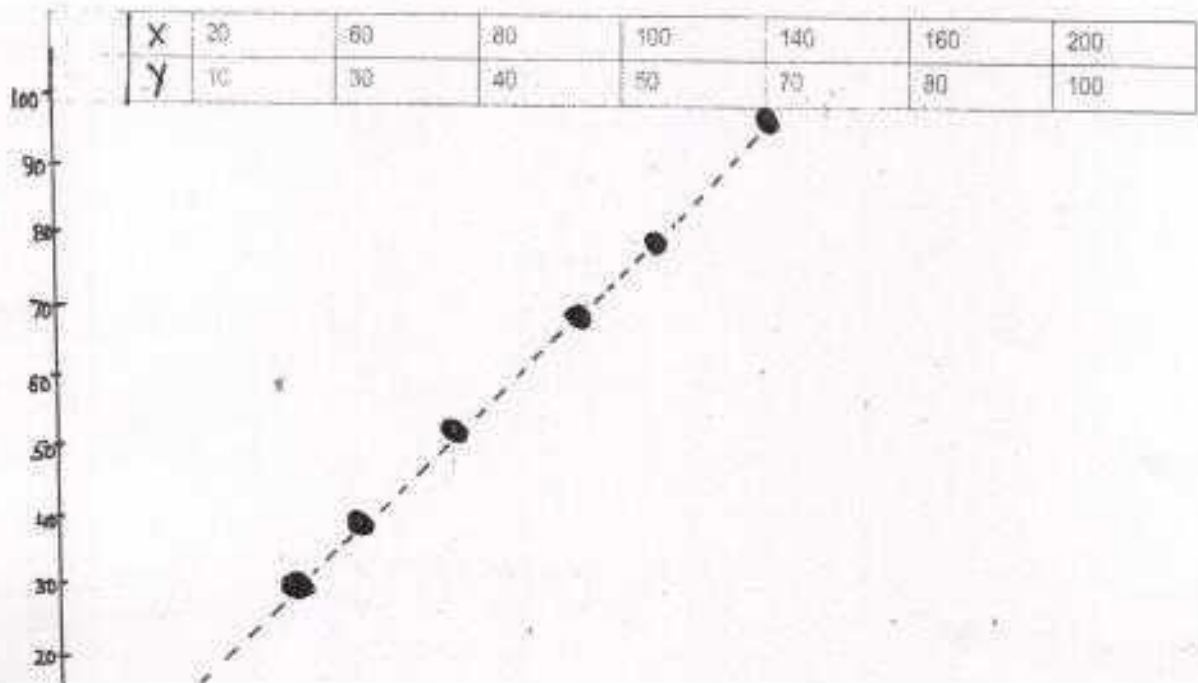
सह-सम्बन्ध मापने की विधि-

1. विक्षेपण चित्र विधि - विधि के ग्राफ पेपर में X अक्ष पर X श्रेणी के पदमूल्यों का तथा Y अक्ष पर Y श्रेणी का पद मूल्यों का पैमाना मान लिया जाता है। इसके बाद X श्रेणी के प्रत्येक मूल्य तथा Y श्रेणी के प्रत्येक मूल्य का प्रांक इस प्रकार अंकित किया जाता है कि दोनों मूल्यों के लिए एक बिन्दु होता है। इस प्रकार जितने मूल्यों के जोड़ होंगे उतने ही बिन्दु ग्राफ पेपर पर चिह्नित किये जायेंगे।

उदाहरणार्थ - यदि 15 पतियाँ और उनकी पत्तियों की आयु की माप को अलग - अलग अक्षों पर लेकर प्रत्येक पत्ती के लिए एक बिन्दु अंकित किया जाय तो ग्राफ पेपर पर कुल 15 बिन्दु अंकित हो जायेंगे। इस प्रकार एक ऐसा चित्र बनेगा, जिसमें बिन्दुओं का समूह X तथा Y श्रेणी के बीच एक सम्बन्ध का बोध करायेगा। इस प्रकार के चित्र को ही विक्षेप चित्र कहते हैं। विक्षेप चित्र को देखकर दोनों श्रेणीयों में सह-सम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है, जिसको अधोलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण निम्न पदमूल्यों के लिए विक्षेप चित्र बनाये और उसके आधार पर सह-सम्बन्ध ज्ञात किजिए?

X	20	40	60	80	100	140	160	200
Y	10	20	30	40	50	70	80	100



उपर्युक्त विक्षेप चित्र से स्पष्ट होता है कि सभी प्राकृत बिन्दु नीचे बाएँ से दाएँ और ऊपर की तरफ एक सीधी रेखा के रूप में हैं। अतः दिये गये पद गुणों में धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक-

सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की यह विधि सर्वोत्तम मानी जाती है, क्योंकि इससे सह-सम्बन्ध की दिशा और परिणाम की मात्रात्मक माप की जा सकती है। इस विधि का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने किया था, इसलिए इसे पियर्सनियन सह-सम्बन्ध का गुणांक कहा जाता है, तथा पियर्सन सह-सम्बन्ध गुणांक को r द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना- प्रत्यक्ष रीति- इस विधि में X श्रेणी तथा Y श्रेणी का वास्तविक समान्तर गणना कर सह-सम्बन्ध गुणांक कहलाते हैं, व्यक्तिगत श्रेणी में सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की क्रिया निम्नवत है।

1. X श्रेणी और Y श्रेणी का समान्तर माध्य निकालिये।
2. दोनों श्रेणी X तथा Y के पदों का उनके समान्तर माध्यों से विचलन फंक्शन dx एवं dy निकालिये।
3. प्रत्येक पद के विचलनों का वर्ग कीजिये व इन्हें क्रमशः dx^2 तथा dy^2 से दर्शाते हुये उनका योग क्रमशः $\sum dx^2$ तथा $\sum dy^2$ ज्ञात कीजिये।
4. प्रत्येक dx व dy को आपस में गुणा करके तदनुगुण गुणनफल $dx \cdot dy$ ज्ञात कीजिये और इनका योग करके $\sum dx \cdot dy$ ज्ञात कीजिये।
5. निम्न सूत्र का प्रयोग करके सह-सम्बन्ध गुणांक r निकाल लिया जाता है।

$$r = \frac{\sum dx \cdot dy}{N \sigma_x \sigma_y}$$

जहाँ पर $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$ X श्रेणी का प्रमाण विचलन है।

तथा $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{N}}$ Y श्रेणी का प्रमाण विचलन है।

निम्न उदाहरण द्वारा कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक निकालना समझा जा सकता है।
उदाहरण- निम्नलिखित समकों से कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक निकालिये।

पत्नियों की आयु (वर्ष)	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
पत्नियों की आयु (वर्ष)	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

हल-

पत्तियों की आयु (X)			पत्तियों की आयु (Y)			
X श्रेणी	$dx = X - \bar{X}$ $X - 30$	dx^2	Y श्रेणी	$dy = Y - \bar{Y}$ $y - 25$	dy^2	$dx dy$
23	$23 - 30 = -7$	$(-7)^2 = 49$	18	$18 - 25 = -7$	$(-7)^2 = 49$	$-7 \times -7 = 49$
27	$27 - 30 = -3$	$(-3)^2 = 9$	20	$20 - 25 = -5$	$(-5)^2 = 25$	$-3 \times -5 = 15$
28	$28 - 30 = -2$	$(-2)^2 = 4$	22	$22 - 25 = -3$	$(-3)^2 = 9$	$-2 \times -3 = 6$
28	$28 - 30 = -2$	$(-1)^2 = 1$	27	$27 - 25 = 2$	$(2)^2 = 4$	$-2 \times 2 = -4$
29	$29 - 30 = -1$	$(0)^2 = 0$	21	$21 - 25 = -4$	$(-4)^2 = 16$	$-1 \times -4 = 4$
30	$30 - 30 = 0$	$(1)^2 = 1$	29	$29 - 25 = 4$	$(4)^2 = 16$	$0 \times 4 = 0$
31	$31 - 30 = 1$	$(1)^2 = 1$	27	$27 - 25 = 2$	$(2)^2 = 4$	$1 \times 2 = 2$
33	$33 - 30 = 3$	$(3)^2 = 9$	29	$29 - 25 = 4$	$(4)^2 = 16$	$3 \times 4 = 12$
35	$35 - 30 = 5$	$(5)^2 = 25$	28	$28 - 25 = 3$	$(3)^2 = 9$	$5 \times 3 = 15$
36	$36 - 30 = 6$	$(6)^2 = 36$	29	$29 - 25 = 4$	$(4)^2 = 16$	$6 \times 4 = 24$
		$\sum dx^2 = 138$			$\sum dy^2 = 164$	$\sum dx dy = 123$

समान्तर माध्य (\bar{x}) = X श्रेणियों के पदों का योग / पदों की संख्या
 समान्तर माध्य (\bar{y}) = Y श्रेणियों के पदों का योग / पदों की संख्या

$$= \frac{23+27+28+28+29+30+31+33+36}{10} = \frac{18+20+22+27+21+29+27+29+28+29}{10}$$

$$= \frac{300}{10}$$

$$= \frac{250}{10}$$

$$= 30$$

$$= 25$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{138}{10}} \\ &= 3.71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\frac{\sum dy^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{164}{10}} \\ &= 4.05 \end{aligned}$$

सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञान करने का सूत्र:-

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum dx dy}{N \sigma_x \sigma_y} \\ &= \frac{123}{10 \times 3.71 \times 4.05} \\ &= 0.82 \end{aligned}$$

प्रस्तुतकर्ता

श्रीमती दीना उद्रेती
 प्रपक्ता अर्थशास्त्र
 आर्यभट्टाजी गवर्नर राजराजेश्वर
 विश्वविद्यालय।